

Übung 14 (Abgabe 01.02.2022)

Hinweis: Die Aufgaben eines Übungsblattes sollen in Gruppen von drei Studierenden bearbeitet werden. Schreiben Sie sich dazu im Moodlekurs

<https://moodle2.uni-leipzig.de/course/view.php?id=35006> ein und melden Sie sich für eine der Gruppen an. Bitte geben Sie bereits die zweite Übungsserie in Dreiergruppen ab. Es ist vorgesehen die Zusammensetzung der Gruppen für das restliche Semester beizubehalten. Die erste Übungen zur Klärung organisatorischer Punkte findet am Montag (11.10.2021 um 13:15 Uhr) statt. Bitte nutzen Sie diese Übung ggfs. zur Gruppenfindung. Bitte beachten Sie die weiteren Anforderungen:

- *Die Prüfungsvorleistung ist das Erreichen von mind. 50% der Punkte pro Übungsblatt.*
- *Die Lösungen sind im .pdf-Format in Moodle hochzuladen.*
- *Verwenden Sie möglichst die \LaTeX -Vorlage der Fachschaft in Halle zur Erstellung Ihres Lösungsblattes:
<http://fachschaft.mathinf.uni-halle.de/informationen/latex>. Dazu empfehlen wir Ihnen auch das Video auf der entsprechenden Seite.*
- *Alle Gruppenmitglieder müssen jede Aufgabe der Gruppenabgabe verstanden haben und vorrechnen können.*
- *Aufgaben, denen keine Punkte zugeordnet sind, sind freiwillig und müssen dementsprechend nicht abgegeben werden.*
- *Abgabetermin ist immer der folgende Dienstag um 23:59 Uhr.*

Aufgabe 1 : Binomialverteilung (4 Punkte)

Wie oft muss eine Laplace-Münze geworfen werden, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit genau dreimal Kopf zu bekommen?

Aufgabe 2 : Binomialverteilung (4 Punkte)

Eine Firma kauft einen Massenartikel ein. Der Hersteller des Massenartikels gibt den Ausschussanteil mit höchstens 0.5% an. Um zu prüfen, ob die Angabe des Herstellers glaubhaft ist, werden der Lieferung 75 Stück zufällig entnommen. Ist darunter höchstens ein Ausschussstück, wird die Lieferung angenommen, sonst wird sie zurückgewiesen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung zu Unrecht zurückgewiesen wird?
- (b) Angenommen, der Ausschussanteil ist in Wahrheit 5% (und nicht 0.5%). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann die Lieferung zu Unrecht angenommen?
- (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit einer irrtümlichen Annahme der Lieferung, falls der Ausschussanteil in Wahrheit 1%, 2%, 3%, 4%, 5% ist und zeichnen Sie die Kurve der Annahmewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Ausschussanteil.

Aufgabe 3 : Ungleichung von Tschebyschew (4 Punkte)

Eine Zufallsgröße X habe den Erwartungswert $\mu = 5$ und die Varianz $\sigma^2 = 4$.

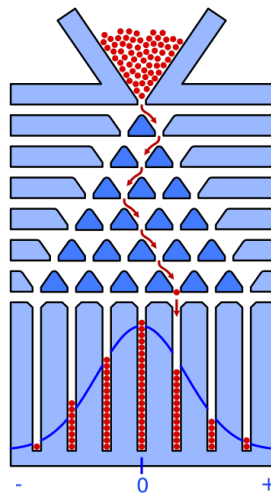
- (a) Geben Sie eine möglichst scharfe untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 5| < 3)$ an.
- (b) Schätzen Sie mithilfe der Ungleichung von Tschebyschew ab, wie groß c mindestens sein muss, damit $P(|X - 5| < c) \geq 0.9$ gilt.

Aufgabe 4 : Ungleichung von Tschebyschew (4 Punkte)

Sei X eine Zufallsgröße mit $E(X) = \mu$ und sei $c > 0$. Beweisen Sie für $\sigma^* = E(|X - \mu|)$ die zur Ungleichung von Tschebyschew analoge Ungleichung: $P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^*}{c}$.

Aufgabe 5 : Simuliertes Galtonbrett (Zusatzaufgabe: 4 Bonuspunkte)

Ein Galtonbrett ist ein mechanisches Modell zur Veranschaulichung der Binomialverteilung:



[<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galton-Brett.svg>]

Auf einem Galtonbrett trifft eine Kugel der Reihe nach auf Scheiben, die die Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts ablenken, bevor die Kugel in ein Fach fällt. Durchlaufen sehr viele Kugeln das Galtonbrett, so ähnelt die Füllhöhe der Fächer am Ende einer Binomialverteilung.

- (a) Implementieren Sie eine Methode `galtonFach`, welche simuliert, dass eine Kugel ein Galtonbrett mit 14 Hindernisreihen durchläuft (also 14 zufällige “links” oder “rechts” Entscheidungen). Dabei soll die Methode `galtonFach` das Fach zurückgeben, in welches die Kugel in der Simulation fällt.
- (b) Simulieren Sie mit Ihrer Methode `galtonFach`, dass 150 000 Kugeln das Galtonbrett durchlaufen. Speichern Sie für jede Kugel das resultierende Fach in einem geeigneten DataFrame.
- (c) Stellen Sie die Verteilung der 150 000 Kugeln auf die Fächer in geeigneter Weise mit `seaborn` dar.
- (d) Berechnen Sie für jedes der Fächer auf ihrem simulierten Galtonbrett, wie viele der 150 000 Kugeln nach Ihrem Erwartungswert in einem Fach sein müssten. Vergleichen Sie diese Erwartungswerte mit den tatsächlichen Anzahlen der Kugeln.